Homogénéité des variances – Guide

Pierre Legendre

Département de sciences biologiques, Université de Montréal,
C.P. 6128, succursale Centre-ville, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada
E-mail: Pierre.Legendre@umontreal.ca

Mars 2000

Le programme *Test_HV* réalise quatre types de tests d'homogénéité des variances pour données univariables (i.e., pour une seule variable). Les tests sont les suivants:

(1) le test de Bartlett,

(2) le test log-anova de Scheffé-Box,

(3) le test C de Cochran,

(4) le test M de Box. Il s'agit d'un test pour données multivariables appliqué ici à une seule variable.

Les quatre statistiques sont testées de façon paramétrique ainsi que par la méthode des permutations.

Statistiques

Les tests réalisés par le programme *Test_HV* sont décrits, par exemple, dans les ouvrages suivants: Winer (1971), Mardia *et al.* (1979), Sokal & Rohlf (1981, 1995), Scherrer (1984) et Zar (1999). Chacun de ces ouvrages décrit un ou deux tests d'homogénéité des variances. La notation suivante est utilisée dans les descriptions ci-dessous: k = nombre de groupes, n_j = nombre d'observations dans le groupe j, n = nombre total d'observations, s_p^2 = variance intragroupe, SCE = somme des carrés des écarts intragroupes (ou dispersion due aux erreurs).

1. Le test de Bartlett (1937a, 1937b) est test le plus souvent présenté dans les manuels d'introduction à la statistique. La statistique de Bartlett compare, par division, les variances des différents groupes (s_j^2) à la variance intragroupe (s_p^2):

$$B = -\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \ln (s_j^2 / s_p^2) \quad \text{où} \quad s_p^2 = \mathrm{SCE} / (n - k) \qquad \textbf{(1)}$$

$$B = (n - k) \ln s_p^2 - \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \ln s_j^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Un facteur de correction C_B permet de transformer B en une statistique distribuée asymptotiquement comme khi-carré:

$$B_c = B / C_B \tag{3}$$

où

$$C_B = 1 + \frac{1}{3(k-1)}\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{(n_j - 1)} - \frac{1}{(n-k)}\right) \tag{4}$$

On peut donc tester B_c contre une distribution de khi-carré avec $\nu = (k - 1)$ degrés de liberté. Le test de Bartlett est puissant si la distribution de la variable dans la population de référence est normale, mais il est gravement affecté par l'absence de normalité (Box 1953, Zar 1999).

2. Le test log-anova de Scheffé-Box (Martin & Games 1977) résulte des travaux de Box (1953) et de Scheffé (1959). Pour ce test, on divise d'abord au hasard les observations de chaque groupe en sous-groupes. On calcule ensuite la variance de chaque sous-groupe et on en prend le logarithme afin de normaliser la distribution des variances. Pour le test, on utilise une statistique F qui compare la dispersion intergroupe (SCI) à la dispersion intragroupe (SCE) *des logarithmes des variances des sous-groupes* plutôt que des données d'origine:

$$F = \frac{\mathrm{SCI}/(k-1)}{\mathrm{SCE}/\sum_{j=1}^{k}(m_j - 1)} \tag{5}$$

m_j, qui est le nombre de sous-groupes dans le groupe j; est approximativement égal à $\sqrt{n_j}$ où n_j est le nombre d'observations dans le groupe j. Le calcul de la statistique-test est décrit dans Sokal and Rohlf (1981, 1995) ainsi que dans Scherrer (1984). La statistique F est testée par comparaison avec une valeur critique de F utilisant les nombres de degrés de liberté indiqués au numérateur et au dénominateur de l'équation 5. Le test log-anova serait moins sensible au manque de normalité que le test de Bartlett (Sokal & Rohlf 1995).

Lorsque n est faible, les résultats du test log-anova peuvent être instables. Il est recommandé de répéter le test avec des divisions différentes des groupes en sous-groupes. Une commande permet d'obtenir différentes divisions aléatoires des groupes en sous-groupes, ce qui constitue la première étape du test log-anova. Référez-vous aux paragraphes “Dialogue avec le programme” des exemples ci-dessous ainsi qu'à la mise en garde à la fin de ce manuel.

3. La statistique C de Cochran est la suivante (Cochran 1941, 1951):

$$C = \frac{s^2_{\mathrm{largest}}}{\sum s_j^2} \tag{6}$$

Une table de valeurs critiques de C produite par Eisenhart (1947) a été reproduite par certains autres auteurs, e.g. Winer (1971). Cette table n'a été calculée que pour certaines combinaisons de nombres de groupes (2 à 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120 et ∞) et de degrés de liberté (ν = 1 à 10, 16, 36, 144 et ∞). Le nombre de degrés de liberté (ν) est:

$$\nu = \max(n_j - 1)$$

où n_j est le nombre d'observations du groupe j. Le programme *Test_HV* ne réalise le test paramétrique de Cochran que pour les valeurs suivantes: nombre de groupes = 2 à 10 et nombre de degrés de liberté = 1 à 10, 16, 36 et 144. Lorsque le test paramétrique est réalisé, le programme fournit seulement une indication de la signification du test au seuil α = 5%. La probabilité paramétrique n'est pas calculée pour ce test.

Le test par permutations est réalisé dans tous les cas. Le Prof. A. J. Underwood (comm. pers., 1999) suggère que le test de Cochran serait la meilleure méthode pour identifier les cas où la variance d'un des groupes est beaucoup plus grande que les autres; cela représente justement une situation où l'analyse de variance se comporte mal (Underwood 1997).

4. Le test M de Box est un test de dispersion multivariable. Dans le programme *Test_HV*, ce test est employé avec une seule variable (p = 1). La statistique de Box est la suivante:

$$M = (n-k)\ln|\mathbf{S}| - \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)\ln|\mathbf{S}_j| \quad \textbf{(7)}$$

où $\mathbf{S}$ est la matrice de dispersion intragroupe alors que $\mathbf{S}_j$ représente la matrice de dispersion du groupe j. Pour des données univariables (p = 1), les statistiques M et B sont identiques. Un facteur de correction C_M, qui diffère du facteur C_B utilisé dans le test de Bartlett, est employé pour transformer M en une statistique distribuée asymptotiquement comme khi-carré:

$$M_c = M / C_M \quad \textbf{(8)}$$

où $$C_M = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(k-1)}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(n_j-1)} - \frac{1}{(n-k)}\right) \quad \textbf{(9)}$$

On peut donc tester M_c contre une distribution de khi-carré avec $\nu = p(p+1)(k-1)/2$ degrés de liberté; rappelons que dans cette application, p = 1.

Le test de Hartley (1950), qui utilise le rapport de la plus grande variance sur la plus petite, ressemble au test de Cochran. Comme il utilise une plus faible portion de l'information disponible que le test de Cochran, il n'est pas inclus dans le programme *Test_HV*. Le test de Kullback (1959) d'homogénéité des variances, qui ressemble au test M de Box, n'est pas non plus disponible dans ce programme.

Fichier de données

Le fichier de données contient un tableau rectangulaire à deux colonnes dont les lignes correspondent aux objets et les colonnes aux variables. L'une des colonnes est la variable à analyser et l'autre est le critère de groupement. On peut placer le critère de groupement ou la variable à analyser en premier; le programme demande à l'utilisateur si on trouve la variable ou le critère de groupement en première colonne.

La variable à analyser contient des nombres réels. Le critère de groupement est représenté par les entiers 1, 2, 3, etc; **le premier groupe doit porter le numéro 1**. Il ne doit pas y avoir de numéro manquant. Par exemple, si on dit au programme qu'il y a 5 groupes, ceux-ci **doivent** être numérotés 1, 2, 3, 4 et 5. L'ordre des objets ou des groupes n'a aucune importance; les objets des différents groupes peuvent être mêlés dans le fichier de données.

Il ne doit y avoir d'identificateurs ni pour les lignes, ni pour les colonnes. Les colonnes sont séparées par un tabulateur ou encore par une ou plusieurs espaces; les espaces en début de ligne sont ignorées. Le fichier de données doit être sauvegardé en format ASCII (texte) et se terminer par une ligne vide; autrement dit, il doit y avoir un retour de chariot à la fin de la dernière ligne de données.

Fichier de résultats

Ce fichier contient les résultats de huit tests, soit trois quatre tests paramétriques et quatre tests permutationnels. Voir les exemples ci-dessous.

Exemple 1

Fichier de données

Sokal & Rohlf (1981: 406; 1995: 400) proposent un fichier de données pour lequel ils ont réalisé le test log-anova. La variable est la largeur, en microns, du scutum de 37 larves de la tique *Haemaphysalis leporispalustris*; le critère de groupement représente le lapin servant d'hôte à ces larves. On désire tester l'homogénéité des variances (H_0) des quatre groupes.

Hôtes (lapins)			
1	2	3	4
372	364	348	342
380	358	351	372
382	342	362	374
368	356	372	376
374	338	344	344
366	344	352	360
360	350	360	
376	376	362	
	366	366	
	350	354	
		342	
		358	
		348	

Dialogue avec le programme

```
Français: tapez (1)
English:  type  (2)
1

Tests  d'homogénéité  des variances
pour k groupes,  une seule variable

Pierre Legendre
Département de sciences biologiques
Université de Montréal.

             © Pierre Legendre, 2000


Nom du fichier de données (n lignes, 2 colonnes)?
Fichier de données: S&R_p400.dat
```

```
Combien d'observations et de groupes?
37 4

(1) La variable en premier?
(2) Le critère de groupement en premier?
1

(0) Ne rien imprimer de plus
(1) Ecrire certains résultats intermédiaires dans le fichier "Debug.out"
0

Combien de permutations? (e.g. 499, 999, 9999, ...)
999

Tapez un petit entier positif pour initialiser
le générateur de permutations aléatoires
1

Tapez un petit entier positif pour initialiser le
générateur de division aléatoire des groupes en
sous-groupes, première étape du test log-anova.
Tapez 0 (pas de permutation des observations) si vous
désirez simplement vérifier l'exemple d'un manuel.
0
```

On a tapé “0” en réponse à cette question parce qu’on désire obtenir des résultats comparables à ceux de Sokal & Rohlf pour le test log-anova. Pour l’analyse d’un fichier de données réel, on tapera plutôt un petit entier (e.g., 1, 2 ou 7); le programme permutera alors les données au hasard à l’intérieur de chaque groupe avant l’analyse.

```
Les résultats se trouvent dans le fichier "Homogen.out"
```

Fichier de résultats “Homogen.out”

```
Tests  d'homogénéité  des variances
pour k groupes,  une seule variable

Pierre Legendre
Département de sciences biologiques
Université de Montréal.

            © Pierre Legendre, 2000


Fichier de données: S&R_p400.dat
 37 observations,  4 groupes

Tests par permutation:   999 permutations

               Stat.  Stat.corrigée p(param.) p(perm)  Signification   df1   df2

Bartlett      4.10337     3.88455   0.27420   0.11400        0           3
Log-anova     3.02332               0.09370   0.09000        0           3     8
C de Cochran  0.45799                         0.06400       -9          12
M de Box      4.10337     3.87222   0.27560   0.11400        0           3

Signification des test paramétriques: 0 = non signif., 1 = signif. (alpha = 5%).
-9: valeur critique non disponible dans la table de C.
```

Les sept tests (trois tests paramétriques et quatre tests permutationnels) indiquent que les variances des quatre groupes ne sont pas significativement hétérogènes au seuil $\alpha = 5\%$. La statistique C de Cochran n'a pas été testée de façon paramétrique parce que la valeur de référence pour 12 degrés de liberté ne se trouve pas dans la table incluse dans le programme.

Exemple 2

Fichier de données

Zar (1999, p. 203) propose le fichier de données suivant pour lequel il a réalisé le test de Bartlett. La variable est la masse (en kg) de 19 porcs divisés en quatre groupes qui ont été nourris différemment. On désire tester l'homogénéité des variances (H_0) des quatre groupes.

Types de nourriture			
1	2	3	4
60.8	68.7	102.6	87.9
57.0	67.7	102.1	84.2
65.0	74.0	100.2	83.1
58.6	66.3	96.5	85.7
61.7	69.8		90.3

Dialogue avec le programme

```
Tests d'homogénéité des variances
pour k groupes et une seule variable

             © Pierre Legendre, 2000


Nom du fichier de données (n lignes, 2 colonnes)?
Fichier de données: Zar_p203.dat

Combien d'observations et de groupes?
19 4

(1) La variable en premier?
(2) Le critère de groupement en premier?
1

(0) Ne rien imprimer de plus
(1) Ecrire certains résultats intermédiaires dans le fichier "Debug.out"
0

Combien de permutations? (e.g. 499, 999, 9999, ...)
999
```

```
Tapez un petit entier positif pour initialiser
le générateur de permutations aléatoires
1

Tapez un petit entier positif pour initialiser le
générateur de division aléatoire des groupes en
sous-groupes, première étape du test log-anova.
Tapez 0 (pas de permutation des observations) si vous
désirez simplement vérifier l'exemple d'un manuel.
4

Les résultats se trouvent dans le fichier "Homogen.out"
```

Fichier de résultats “Homogen.out”

```
Tests  d'homogénéité  des variances
pour k groupes,  une seule variable

Pierre Legendre
Département de sciences biologiques
Université de Montréal.

            © Pierre Legendre, 2000


Fichier de données: Zar_p203.dat
 19 observations,  4 groupes

Tests par permutation:   999 permutations

               Stat.  Stat.corrigée p(param.) p(perm)  Signification   df1   df2

Bartlett      0.03655     0.03284   0.99843   0.99800        0           3
Log-anova     0.11480               0.94685   0.95600        0           3     4
C de Cochran  0.27622                         0.99600        0           4
M de Box      0.03655     0.03242   0.99846   0.99800        0           3

Signification des test paramétriques: 0 = non signif., 1 = signif. (alpha = 5%).
-9: valeur critique non disponible dans la table de C.
```

Les huit tests (quatre paramétriques et quatre permutationnels) indiquent que les variances des quatre groupes ne sont pas significativement hétérogènes au seuil $\alpha = 5\%$.

Distribution du programme

Le programme *Test_HV*, écrit par P. Legendre, est distribué à partir de notre site WWWeb. On y trouve la documentation en français, des fichiers de données pour des essais, de même que les programmes exécutables pour MacOS (68k ou PowerPC) et DOS 32-bits (approprié pour des sessions DOS sous Windows 95/98/NT). L’adresse WWWeb est la suivante: http://www.fas.umontreal.ca/BIOL/legendre/.

Test log-anova: mise en garde

L'avertissement qui suit a déjà été donné plus haut: lorsque le nombre d'objets est faible, les résultats du test log-anova peuvent être très instables. Dans ce test, on divise d'abord de façon aléatoire les observations de chaque groupe en sous-groupes, on calcule la variance de chaque sous-groupe, puis on réalise une analyse de variance *à partir des logarithmes de ces variances des sous-groupes* et non à partir des données d'origine. Le nombre de sous-groupes est approximativement égal à la racine carrée du nombre d'objets dans le groupe; ce nombre, qui détermine le nombre de valeurs de log(variance) représentant chaque groupe dans l'analyse, est donc très faible si n_j, le nombre d'observations dans le groupe j, est faible. Qui plus est, si n_j est faible, une permutation aléatoire différente des objets avant la formation des sous-groupes peut donner des variances de sous-groupes très différentes. Telle est la raison pour laquelle les résultats du test log-anova peuvent différer très fortement pour des initialisations différentes du générateur de division aléatoire des groupes en sous-groupes.

De même, les versions Macintosh et DOS du programme peuvent produire des résultats très différents, pour le test log-anova, pour une initialisation apparemment identique du générateur de division aléatoire des groupes en sous-groupes. Cela est dû au fait que le générateur de nombre aléatoires “ran” utilisé dans le compilateur *Language System Fortran* utilisé pour créer la version Macintosh ne produit pas la même séquence de nombres pseudo-aléatoires que le générateur “rand” du compilateur *g77* utilisé pour créer la version DOS 32 bits. La division des groupes en sous-groupes n'est donc pas la même d'une version du programme à l'autre, même si l'utilisateur fournit la même valeur (e.g., 1 ou 10) pour l'initialisations du générateur de division aléatoire des groupes en sous-groupes.

Lorsque le nombre d'observations est faible, il est recommandé, soit de répéter le test log-anova avec plusieurs divisions différentes des groupes en sous-groupes, soit de faire abstraction des résultats de ce test.

Références

Bartlett, M. S. (1937a) Some examples of statistical methods of research in agriculture and applied biology. *J. Roy. Statist. Soc. Suppl.* 4: 137-170.

Bartlett, M. S. (1937b) Properties of sufficiency and statistical tests. *Proc. Roy. Statist. Soc. Ser. A* 160: 268-282.

Box, G. E. P. (1953) Non-normality and tests on variances. *Biometrika* 40: 318-335.

Cochran, W. G. (1941) The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total. *Annals of Eugenics (London)* 11: 47-52.

Cochran, W. G. (1951) Testing a linear relation among variances. *Biometrics* 7: 17-32.

Eisenhart, C. (1947) Significance of the largest of a set of sample estimates of variance. In: *Selected techniques of statistical analysis for scientific and industrial research and production and management engineering* (Eds. Eisenhart, C., Hastay, M. W. and Wallis, W. A.), pp. 383-394, New York: McGraw-Hill.

Hartley, H. O. (1950) The maximum F-ratio as a short-cut test for heterogeneity of variance. *Biometrika* 37: 308-312.

Kullback, S. (1959) *Information theory and statistics.* New York: Wiley.

Mardia, K. V., Kent, J. T. and Bibby, J. M. (1979) *Multivariate analysis.* London: Academic Press.

Martin, C. G. and Games, P. A. (1977) Anova tests for homogeneity of variances: nonnormality and unequal samples. *Journal of Educational Statistics* 2: 187-206.

Scheffé, H. (1959) *The analysis of variance.* New York: Wiley.

Scherrer, B. (1984) *Biostatistique.* Boucherville: Gaëtan Morin Ed.

Sokal, R. R. and Rohlf, F. J. (1981) *Biometry – The Principles and Practice of Statistics in Biological Research* (Second Edition). New York: W. H. Freeman.

Sokal, R. R. and Rohlf, F. J. (1995) *Biometry – The Principles and Practice of Statistics in Biological Research* (Third Edition). New York: W. H. Freeman.

Underwood, A. J. (1997) *Experiments in ecology – Their logical design and interpretation using analysis of variance.* Cambridge: Cambridge University Press.

Winer, B. J. (1971) *Statistical principles in experimental design* (Second Edition). New York: McGraw-Hill.

Zar, J. H. (1999) *Biostatistical analysis* (Fourth Edition). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Citation du programme

Les utilisateurs de ce programme peuvent y référer en citant le présent manuel:

Legendre, P. 2000. Homogénéité des variances – Guide. Département de sciences biologiques, Université de Montréal. 10 p.
Distribué à partir du site WWWeb <http://www.fas.umontreal.ca/biol/legendre/>.